

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} .
 b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que M tiene inversa y hallarla

Condición para que una matriz tenga inversa: su determinante $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2-a - (-1) \cdot (a-3) = 2-a+a-3 = -1 \neq 0 \text{ por tanto } M \text{ tiene inversa}$$

$$\text{Calculamos } M^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } M)^t$$

$$\text{Adj } (M) = \begin{pmatrix} \overset{+}{2-a} & \overset{-}{-1} \\ \overset{-}{a-3} & \overset{+}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & +1 \\ -a+3 & +1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Adj } M)^t = \begin{pmatrix} 2-a & -a+3 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-a & -a+3 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+a & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa } M^{-1} = \begin{pmatrix} -2+a & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} .
b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular el valor de "X" en la ecuación $MA = B - MX$ para $a = -1$

Sustituimos el valor de "a" en la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos "X" en la ecuación: $MX = B - MA$

$$\underbrace{M^{-1}}_I \cdot MX = M^{-1} \cdot (B - MA)$$

$$X = M^{-1} \cdot (B - MA)$$

$$M \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B - M \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k .

b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

a) Estudiar el rango de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{Resolvemos el determinante de } A: A = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 - (-8k - 8k + 20) =$$

$$= 5k^2 + 16k + 12 = 0$$

$$\begin{matrix} k = -2 \\ k = \frac{-6}{5} \end{matrix} \longrightarrow \text{Para } k \neq -2 \text{ y } k \neq \frac{-6}{5}$$

$$\boxed{\text{Rango } A = 3}$$

$$\boxed{\text{Para } k = -2}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow \boxed{\text{Rango } A = 2}$$

$$\boxed{\text{Para } k = \frac{-6}{5}}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & \frac{-6}{5} \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \longrightarrow \boxed{\text{Rango } A = 2}$$

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k .

b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

b) Comprobar que $A^2 = 2A - I$ para $k = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = \\ &= 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I \end{aligned}$$