

PAU CANARIAS FACIL

MATERIAL EDUCATIVO PREMIUM

Examen resuelto

paso a paso

BLOQUE · ANÁLISIS

Julio 2025

Matemáticas II

paucanariasfacil.com

JULIO 2025

Bloque: Análisis

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159 e^{-0.5t}}$$

- ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?
- ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.
- Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.
- ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

a) Cálculo del numero de hormigas en el instante $t = 0$

$$H(0) = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^{-0.5 \cdot 0}} = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^0} = \frac{6400}{160} = 40$$

La colonia inicialmente estaba formada por 40 hormigas

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159 e^{-0.5t}}$$

- ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?
- ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.
- Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.
- ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

b) Cálculo de la Tasa de variación media

$$\underline{TVM(0-12)} = \frac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \frac{4591 - 40}{12 - 0} = 379,25 = 379 \text{ individuos/mes}$$

$$H(12) = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^{-0,5 \cdot 12}} = 4590,70 \sim 4591 \text{ individuos}$$

$$H(0) = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^{-0,5 \cdot 0}} = 40 \text{ individuos}$$

$$\underline{TVM(12-24)} = \frac{H(24) - H(12)}{24 - 12} = \frac{6394 - 4591}{24 - 12} = 150 \text{ individuos/mes}$$

$$H(24) = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^{-0,5 \cdot 24}} = 6393,75 \sim 6.394 \text{ individuos}$$

La tasa de crecimiento va disminuyendo de 379 individuos el primer año a 150 el segundo

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159 e^{-0.5t}}$$

- ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?
- ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.
- Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.
- ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

c) Crecimiento y decrecimiento

$$H'(t) = \frac{0 - 6400 \cdot 159 \cdot e^{-0.5t} \cdot (-0.5t)}{(1 + 159 \cdot e^{-0.5t})^2} = 0$$

$$H'(t) = \frac{508800 \cdot e^{-0.5t}}{(1 + 159 \cdot e^{-0.5t})^2} \longrightarrow \text{La derivada siempre será positiva ya que el denominador está al cuadrado y el numerador es una función exponencial}$$



La función es Creciente

Asíntota horizontal

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6400}{1 + e^{-0.5 \cdot \infty}} = \frac{6400}{1 + e^{-\infty}} = \frac{6400}{1 + 0} = 6400$$

La colonia siempre crece, pero se estabilizará cuando llegue a las 6400 hormigas

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159 e^{-0,5t}}$$

- ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?
- ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.
- Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.
- ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

d) Cálculo de "t" cuando $H(t)$ alcance la mitad de su capacidad de carga

$$3200 = \frac{6400}{1 + 159 e^{-0,5t}}$$

$$3200 + 508800 e^{-0,5t} = 6400$$

$$508800 e^{-0,5t} = 3200$$

$$e^{-0,5t} = 0,006289$$

$$\ln e^{-0,5t} = \ln 0,006289 \rightarrow \text{aplico logaritmo para resolver exponencial}$$

$$-0,5 t \ln e = \ln 0,006289$$

$$-0,5 t = -5,068$$

$$t = 10,13 \text{ meses}$$

$$H(t) = \frac{6400}{2} = 3200$$

La población de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad a los 10 meses