

PAU CANARIAS FACIL

MATERIAL EDUCATIVO PREMIUM

# Examen resuelto

## paso a paso

BLOQUE · GEOMETRÍA

Junio 2025

Matemáticas II

[paucanariasfacil.com](http://paucanariasfacil.com)

JUNIO 2025

Bloque: Geometría

**3A.** En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas  $r_1$  y  $r_2$  siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- Comprobar que  $P \in r_1$  y que  $P \notin r_2$
- Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas  $r_1$  y  $r_2$
- Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas  $r_1$  y  $r_2$

a) Comprobar que P pertenece a  $r_1$  y que P no pertenece a  $r_2$

$$r_1 \begin{cases} 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 2 & \longrightarrow \text{cumple} & 2 = 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 = 1 & \longrightarrow \text{cumple} & 1 = 1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{P \in r_1}$$

$$r_2: \frac{2+3}{2} = 2 - (-1) = \frac{1+4}{3} \longrightarrow \frac{5}{2} \neq 3 \neq \frac{5}{3} \quad \boxed{P \notin r_2}$$

**3A.** En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas  $r_1$  y  $r_2$  siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- Comprobar que  $P \in r_1$  y que  $P \notin r_2$
- Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas  $r_1$  y  $r_2$
- Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas  $r_1$  y  $r_2$

*b) Hallar la distancia entre dos puntos*

*Calculamos punto interseccion entre  $r_1$  y  $r_2$*

*Convertimos ambas rectas a parametricas:*

$$P(2, -1, 1)$$

$$\vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -27\vec{i} + 18\vec{j} - 18\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$r_1 = \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -4 + 3\mu \end{cases}$$

*Resolvemos sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = -3 + 2\mu \\ -1 + 2\lambda = 2 - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} -3\lambda - 2\mu = -5 \\ 2\lambda + \mu = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{rcl} -3\lambda & -2\mu & = -5 \\ 4\lambda & +2\mu & = 6 \\ \hline \lambda & & = 1 \end{array}$$

*sustituimos en  $r_1$*

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \longrightarrow \text{Punto de intersección } Q(-1, 1, -1)$$

*Hallamos distancia entre P y Q con el módulo:*

$$\vec{PQ} = (-3, 2, -2) \quad |PQ| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17} = 4,12$$

La distancia entre los punto P y Q es 4,12 u

**3A.** En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas  $r_1$  y  $r_2$  siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- Comprobar que  $P \in r_1$  y que  $P \notin r_2$
- Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas  $r_1$  y  $r_2$
- Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas  $r_1$  y  $r_2$

*c) Hallar el ángulo entre las dos rectas*

$$V_{r_1} = (-3, 2, -2) \quad V_{r_2} = (2, -1, 3)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(-3, 2, -2) \cdot (2, -1, 3)|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|-6 - 2 - 6|}{\sqrt{238}} = 0,907$$

$$\alpha = 24,83^\circ = 24^\circ 50' 24''$$

El ángulo que forman las dos rectas es  $24^\circ 50' 24''$

**3B.** En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2); \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$   
 b) Hallar el punto simétrico de  $A$  con respecto del plano  $\pi$

a) Hallar la posición relativa plano-recta

$$\vec{n} = (-1, 2, 1)$$

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(-1, 2, 1) \cdot (12, 8, 4) = -12 + 16 + 4 \neq 0 \longrightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

Calculamos el punto de corte:

Pasamos la recta a paramétrica:

$$Vr = (12, 8, 4)$$

$$Z = 0$$

$$y = -5$$

$$Pr(-7, -5, 0)$$

$$4x = 7 - 2 \cdot 0 + 7 \cdot (-5) \quad X = -7$$

$$r = \begin{cases} x = -7 + 12\lambda \\ y = -5 + 8\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad \pi: -x + 2y + z + 1 = 0$$

$$-(-7 + 12\lambda) + 2(-5 + 8\lambda) + 4\lambda + 1 = 0$$

$$8\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo  $\lambda$  en la ecuación, obtenemos el punto de corte:

$$x = -4$$

$$y = -3$$

$$z = 1$$

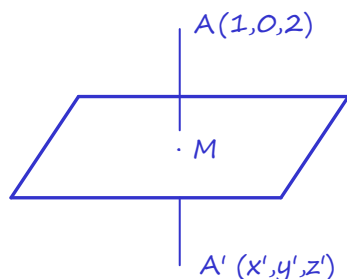
$$P(-4, -3, 1)$$

**3B.** En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2); \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$   
 b) Hallar el punto simétrico de  $A$  con respecto del plano  $\pi$

b) Hallar punto simétrico de un punto respecto al plano



Hallamos el punto de corte de  $r$  con  $\pi$

- 1) Hallamos ecuación de la recta:  $V_r = V_{\text{plano}} = (-1, 2, 1)$   
 $A(1, 0, 2)$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

- 2) Sustituimos en la ec. del plano:  $-x + 2y + z + 1 = 0$

$$-1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1}{3}$$

- 3) Punto de corte:  $x = \frac{4}{3}$   $y = \frac{-2}{3}$   $z = \frac{5}{3}$

- 4) Aplicamos fórmula del punto medio

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= \frac{1 + x'}{2} & x' &= \frac{5}{3} \\ \frac{-2}{3} &= \frac{0 + y'}{2} & y' &= \frac{-4}{3} \\ \frac{5}{3} &= \frac{2 + z'}{2} & z' &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$A' \left( \frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$